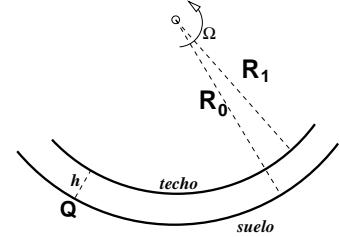


P1: Una nave (sistema S') tiene la forma de un gran anillo de radio externo R_0 y que se mueve en el espacio interestelar (sistema inercial S) con velocidad uniforme. La nave rota con velocidad angular $\vec{\Omega}$ constante y perpendicular al plano del anillo. Desde un punto fijo Q al "suelo" de la nave se lanza una partícula P "verticalmente" con rapidez inicial de magnitud $\frac{\Omega R_0}{\sqrt{3}}$.



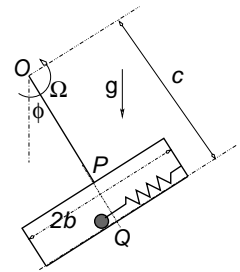
Haciendo sus cálculos en el sistema S' de la nave determine:

- La velocidad angular, calculada en S' , que tiene P en torno a al centro de giro $O = O'$, cuando P está a distancia $\rho \leq R_0$ del centro de la nave.
- La velocidad radial $\dot{\rho}$ como función de ρ .
- La coordenada ρ como función del tiempo. (Puede serle útil saber que ρ^2 es un polinomio cuadrático en t .)
- Suponiendo que P no alcanza a chocar con el techo, determine el tiempo t_{vuelo} que tarda en volver al suelo.
- Obtenga la distancia (arco) entre el punto de partida Q y aquel en que cae luego de su vuelo.

EN ESTE PROBLEMA ALGUNOS ERRORES DE SIGNO SERÁN CONSIDERADOS ERRORES GRAVES.

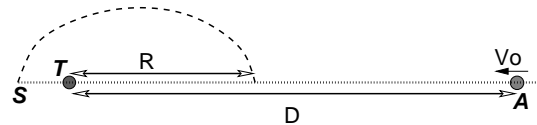
P2: Un recipiente rectangular de ancho basal $2b$ está soldado a un brazo OP que lo hace girar con velocidad angular constante, Ω , en torno a un eje horizontal que pasa por el punto O . Esto es, $\phi = \Omega t$. La distancia entre el punto O y el fondo del recipiente es c . En el fondo del recipiente una partícula de masa m se encuentra ligada mediante un resorte de constante elástica k y largo natural b a uno de los costados del recipiente como muestra la figura. Desprecie todo roce y suponga que se cumple que $k = m\Omega^2$.

Si $\phi = 0$ cuando $t = 0$ (eje OP vertical), la partícula está en el punto medio Q , que corresponde al resorte en su largo natural b , y su velocidad relativa al recipiente es nula.



- Determine la distancia de la partícula al punto Q como función del tiempo.
- Determine una condición entre Ω y el largo c tal que la partícula nunca se separe del fondo del recipiente.

P3: Se detecta un asteroide A que a una distancia D de la Tierra se mueve con rapidez v_0 directo hacia ella (ver figura). Se cuenta con un satélite S que en ese mismo instante se ubica justo al otro lado de la Tierra como muestra la figura. Se planea dar al satélite una órbita elíptica de tal manera que intercepte *perpendicularmente* la trayectoria del asteroide chocando con él.



Note que v_0 es la rapidez del asteroide tan solo en $t = 0$.

Un objetivo del problema es determinar la excentricidad de la órbita elíptica requerida.

- Si al detectarse el asteroide se observó que $v_0 = \sqrt{2GM}/D$ determine la distancia del asteroide a la Tierra en función del tiempo ($t=0$ en la condición de la figura). [2 pt]
- Determine la distancia R de intercepción suponiendo conocida la excentricidad e de la órbita elíptica del satélite. (Sugerencia: exprese el semieje mayor a de la órbita elíptica en función de R y la excentricidad e , y utilice la 3a Ley de Kepler [$T^2 = 4\pi^2 a^3 / GM$] para determinar el tiempo que el satélite tarda en interceptar al asteroide. [3 pt])
- Si en $t=0$ el satélite S se encontraba a una distancia $D/5$ de la Tierra, escriba una ecuación algebraica que determine e (no la resuelva). [1 pt]

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}' - m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}'$$

sP1 Si la nave se mueve con velocidad uniforme con respecto a un sistema inercial, existe otro sistema inercial en el cual está en reposo.

La fuerza centrífuga resulta ser $m\Omega^2\rho\hat{p}$ y la fuerza de Coriolis es $2m\Omega(\rho\dot{\phi}\hat{p} - \dot{\rho}\hat{\phi})$ de modo que las ecuaciones escalares de movimiento son

$$\begin{aligned}\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2 &= \Omega^2\rho + 2\Omega\rho\dot{\phi} \\ 2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi} &= -2\Omega\dot{\rho}\end{aligned}$$

La segunda se reduce a $\frac{d}{dt}[(\rho^2\dot{\phi}) + \Omega\rho^2] = 0$ que implica

$$\dot{\phi} = \frac{R_0^2 - \rho^2}{\rho^2} \Omega$$

consistente con que $\dot{\phi}(0) = 0$ ya que $\rho(0) = R_0$.

Un poco de álgebra permite deducir que la ecuación para ρ se reduce a

$$\ddot{\rho} = \frac{R_0^4\Omega^2}{\rho^3} \quad (*)$$

Si esta ecuación se multiplica por $\dot{\rho}$ se puede integrar una vez:

$$\dot{\rho}^2 = \frac{5\rho^2 - 3R_0^2}{6\rho^2} R_0^2\Omega^2$$

que expresa la velocidad radial en función de ρ . Se ha cuidado de satisfacer que la velocidad radial inicial sea la dada.

Pero tampoco es difícil integrar directamente la ecuación Ec.(*). La solución de esta ecuación tiene la forma genérica,

$$\rho = R_0 \sqrt{1 - 2bt + (b^2 + \Omega^2)t^2}$$

que cumple con que $\rho(0) = R_0$. Imponiendo que $\dot{\rho} = -\frac{\Omega R_0}{\sqrt{3}}$ se obtiene que $b = \frac{\Omega}{\sqrt{3}}$ lo que da

$$\rho = R_0 \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\Omega t + \frac{4}{3}\Omega^2 t^2}$$

Para que ρ vuelva a valer R_0 es necesario que $-2\sqrt{3}\Omega t + 4\Omega^2 t^2$ se anule, esto es

$$t_{\text{total}} = \frac{\sqrt{3}}{2\Omega}$$

es el tiempo que tarda en volver al suelo.

El cuerpo cae a una distancia que es

$$d = R_0 \int_0^{t_{\text{total}}} \dot{\phi} dt = \frac{3\sqrt{3} - 2\pi}{6} R_0 \approx 0,18 R_0$$

DARSE CUENTA QUE LA VELOCIDAD RADIAL $\dot{\rho}$ EN LA PARTIDA ES NEGATIVA ES ESENCIAL.

sP2 Escogemos el origen O' en el punto medio Q de la base de la caja, el eje X' sobre la base de la caja y el eje Y' apuntando hacia el centro de giro O . Las fuerzas propias son el peso, la del resorte y la normal: $-i' mg \sin \Omega t - j' mg \cos \Omega t - kx' i' + N j'$. La $-m\ddot{R}$ es $-m\Omega^2 c j'$; la centrífuga es $m\Omega^2 x' i'$; y la de Coriolis es $-2m\Omega \dot{x} j'$. La ecuación de movimiento se separa en dos (no se pondrá las primas)

$$m\ddot{x} = -mg \sin \Omega t - kx + m\Omega^2 x \quad (1)$$

$$0 = N - mg \cos \Omega t - m\Omega^2 c - 2m\Omega \dot{x} \quad (2)$$

En (1) los dos últimos términos se cancelan debido a que $k = m\Omega^2$ de modo que es una ecuación fácil de integrar y que da

$$x(t) = \frac{g}{\Omega^2} (\sin \Omega t - \Omega t)$$

(Es trivial comprobar que $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 0$).

Lo anterior implica que la normal es

$$N/m = 3g \cos \Omega t + \Omega^2 c - 2g$$

por lo cual, al exigir que $N \geq 0$ se obtiene

$$\Omega^2 \geq \frac{5g}{c}$$

para que la masa no se despegue cuando $\cos \Omega t = -1$.

sP3 Se puede hacer de muchas formas distintas. La energía del asteroide en cualquier instante es $E = mv^2/2 - GMm/r$, donde M es la masa de la Tierra y, puesto que es un

movimiento radial, $v = dr/dt$. Al reemplazar los datos de v_0 y $r = D$ se deduce que $E = 0$, energía que se conserva hasta el choque. Se tiene entonces que antes del choque se cumple que

$$v = \frac{dr}{dt} = -\frac{\sqrt{2GM}}{r}$$

que permite establecer que $r^{3/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}D^{3/2} - 3\sqrt{GM}t)$. Esto implica que en el instante t_R en que el asteroide está a distancia R de la Tierra, se tiene que

$$t_R = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{GM}} (D^{3/2} - R^{3/2})$$

Recordemos que con las elipses se tiene que

$$r_{\text{max}} = \frac{R_0}{1-e}, \quad r_{\text{min}} = \frac{R_0}{1+e}$$

Se quiere tener una órbita elíptica con la Tierra en un foco, y con $r_{\text{max}} = R$ y que tarde t_R en ir desde el punto en que tiene $r = r_{\text{min}}$ hasta el punto en que tiene r_{max} . De modo que este tiempo que ya se ha designado t_R es la mitad del período de la órbita elíptica. Tan solo de exigir que $r_{\text{max}} = R$ se obtiene R_0 y se obtiene que

$$r_{\text{min}} = \frac{1-e}{1+e} R \quad \text{junto con} \quad r_{\text{max}} = R$$

y de aquí que el diámetro mayor, que es $2a$, determina que $a = R/(1+e)$.

Ya se tiene una expresión para T y una para a . Al usar la 3ra ley de Kepler resulta

$$R^3 = \frac{(1+e)^{3/2}}{(1+e)^{3/2} + 3\pi/\sqrt{2}} D^3$$

Finalmente al imponer que $r_{\text{min}} = D/5$ lo que implica .. (aj!)

PUEDE HABER ERRORES